МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2019

Теорія ймовірностей. Випадкові величини : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю.В. Сидоренко. – Електронні текстові дані (1 файл: 624 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 33 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 01.04. 2019)
за поданням Вченої ради теплоенергетичного факультету (протокол № 8 від 25.03. 2019)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Укладач: *Сидоренко Юлія Всеволодівна, канд. техн. наук, доцент*

Відповідальний редактор: *Шаповалова С. І., канд. техн. наук, доцент*

Рецензент: *Кондратюк В.А., канд. техн. наук*

За редакцією укладача

Посібник розроблений на підставі робочої програми кредитного модуля «Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси та математична статистика» та призначений для якісного засвоєння матеріалу студентами.

Призначений для для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем».

Спрямований на формування у студентів уміння вибирати та перетворювати математичні моделі явищ, процесів і систем для їх ефективної програмно-апаратної реалізації, допомагає засвоїти знання для знаходження числових характеристик випадкових величин та уміння працювати з законами розподілу випадкових величин. Забезпечує студентів необхідними прикладами виконання завдань, запланованих впродовж семестру.

ЗМІСТ

1. РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Приклади випадкових величин:

1. кількість студентів на парі;
2. кількість яєць, отриманих від однієї курки за рік;
3. кількість дітей, народжених у даному пологовому будинку;
4. кількість студентів у певній аудиторії, народжених під сузір'ям Близнят;
5. кількість студентів, які одержали на іспиті «відмінно»;
6. відсоток жиру в молоці;
7. час, проведений у дорозі з дому в інститут;
8. кількість опадів, що випали в Києві за липень;
9. глибина засівання насіння під час сівби;
10. середній бал атестата зрілості.

Означення. Випадковою називається величина, що внаслідок випробування може набути того чи того числового значення, причому заздалегідь невідомо, якого саме.

Випадкові величини поділяються на два типи: дискретні та неперервні.

Означення. Випадкову величину називають дискретною, якщо всі можливі значення ізольовані одне від одного і їх можна занумерувати (приклади 1-5).

Означення. Випадкову величину називають неперервною, якщо всі її можливі значення заповнюють деякий скінчений або нескінченний інтервал (приклади 6-10).

Задача 1. Припустимо, що череду тварин обробляють дезінфекційною речовиною проти захворювання А. Успіх процедури становить 90%. З череди після обробки відбирають 4 тварини. Обчислити ймовірності подій ={кількість здорових тварин серед відібраних дорівнює 0; дорівнює 1 тощо}

Розв'язок. Складемо таблицю, у першому рядку якої розмістимо можливі значення випадкової величини, у другому — відповідні їм імовірності (див. табл.1).

Таблиця 1

x	0	1	2	3	4
P	$P_{0,4}=C^0{}_4p^0q^4$ 0.0001	$P_{1,4}=C^1{}_4p^1q^3$ 0.0036	$P_{2,4}=C^2{}_4p^2q^2$ 0.0486	$P_{3,4}=C^3{}_4p^3q^1$ 0.2916	$P_{4,4}=C^4{}_4p^4q^0$ 0.6561

Через те, що всі події в цьому випробуванні утворюють повну групу,

$$\sum_{i=1}^{4} P_{i,4} = 1.$$

Справді, 0.0001 + 0.0036 + 0.0486 + 0.2916 + 0.6561 = 1.

Таблиця повністю характеризує випадкову величину X — кількість здорових тварин серед чотирьох відібраних.

Означення. Законом розподілу випадкової величини називається відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та її ймовірностями.

Задача 2. Визначено, що в певній місцевості протягом низки років в червні налічується 30% дощових днів. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості дощових днів протягом одного тижня червня.

Розв'язок. Можливі значення випадкової величини **X** такі: $\mathbf{x_0}=0$, $\mathbf{x_1}==1$, $\mathbf{x_2}=2$, $\mathbf{x_3}=3$, $\mathbf{x_4}=4$, $\mathbf{x_5}=5$, $\mathbf{x_6=6}$ **.**

За аналогією до попередньої задачі складемо закон розподілу у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0.0824	0.2472	0.3128	0.2263	0.0973	0.0250	0.0036	0.0002

Найбільшу ймовірність має подія, що на тижні буде два дощові дні.

Ряд розподілу

Найпростішою формою завдання закону розподілу дискретної випадкової величини X є ряд розподілу — таблиця, що складається з двох рядків: у верхньому перелічуються всі можливі значення випадкової величини (x_1, x_2, ... , x_n), у нижньому – ймовірності (p_1, p_2, ... , p_n), що їм відповідають.

Таблиця 3

X_i	X_1	X_2	…	X_n
P_i	P_1	P_2	…	P_n

Кожна ймовірність p_i (i=1, 2, ... , n) – це ймовірність події, що випадкова величина X набуватиме значення x_i:

$p_1=P(X=x_1)$: $p_2=P(X=x_2)$, ... , $p_n=P(X=x_n)$, причому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Багатокутник розподілу

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для чого в прямокутній системі координат необхідно побудувати точки з координатами (**x_1, p_1**), (**x_2, p_2**),…, (**x_n, p_n**) і з’єднати їх відрізками прямих. Одержану фігуру називають багатокутником розподілу.

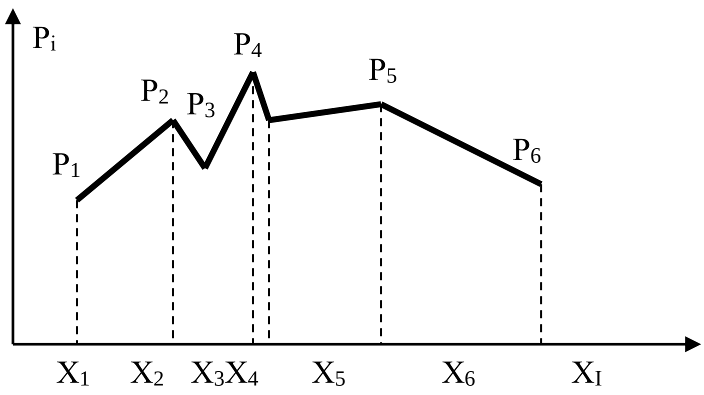


Рис.1. Багатокутник розподілу

Функція розподілу

Однією з форм закону розподілу як дискретних, так і неперервних випадкових величин є функція розподілу **F(x),** яка визначає для кожного значення **x** імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке менше за **x**, тобто **F(x)=P(X<x).**

Функцію розподілу **F(x)** називають також *інтегральною функцією* розподілу**,** або *інтегральним законом* розподілу. Інтегральна функція розподілу має такі властивості:

Властивість 1. Значення функції розподілу належать відрізку [0; 1]: $0 \le F(x) \le 1$.

Властивість 2. F(x) — неспадна функція, тобто при $x_2 > x_1$, $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина **X** набуде значення в інтервалі (**a,b**), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a).$$

Наслідок 2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина **X** набуде одного (певного) значення, наприклад x_1, дорівнює нулю:

$$P(X=x_1)=0.$$

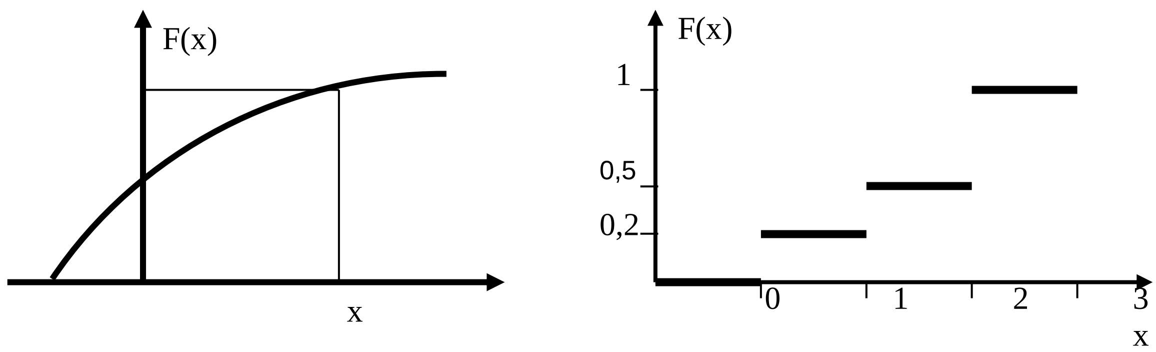
Властивість 3. Якщо всі можливі значення випадкової величини **X** належать інтервалу (**a, b**), тоді

F(x)=0, при $x \le a$; F(x)=1, при x>b.

Наслідок 1. Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини розташовані на всій осі OX, то слушні такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Графік функції розподілу неперервної випадкової величини, побудований на основі властивостей 1-3, показано на рис. 2.



а) б)

Рис. 2. Графіки інтегральної функції випадкової величини

(ліворуч – неперервної, праворуч — дискретної).

Для дискретної випадкової величини **X** функція **F(x)** дорівнює сумі ймовірностей $\mathbf{p_i}$ тих її значень $\mathbf{x_i}$, що менші за **x:** $F(x) = \sum_{x_i < x} P_i$.

Наприклад, для випадкової величини **X,** заданої рядом розподілу

x_i	1	2	3
P_i	0,2	0,3	0,5

інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x \le 1 \\ 0.2 & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2, \\ 0.5 & \text{якщо} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{якщо} \quad x > 3. \end{cases}$$

Її графіком є ступінчаста функція (рис. 2,б). У точках $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ функція **F(x)** змінюється стрибкоподібно, причому величина стрибків дорівнює ймовірностям: $p_1=0.2$; $p_2=0.3$; $p_3=0.5$.

Щільність розподілу

Однією з форм закону розподілу, що існує тільки для неперервних випадкових величин, є щільність розподілу **f(x),** яка дорівнює першій похідній функції розподілу **F(x):**

$$\mathbf{f(x) = F'(x).}$$

Функцію **f(x)** називають також *диференціальним законом* розподілу випадкової величини **X**, або *диференціальною функцією* розподілу. Щільність розподілу має такі властивості:

Властивість 1. f(x)>0. Це випливає з того, що функція розподілу **F(x)** є неспадною функцією, отже, її похідна **F'(x) = f(x)** є функцією невід'ємною. Геометрично ця властивість означає, що графік щільності розподілу (крива розподілу) розташований не нижче від осі абсцис.

Властивість 2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в нескінченних границях дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрично це означає, що повна площа, обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, дорівнює одиниці. Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (**a,b**), тоді:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Імовірність того, що неперервна випадкова величина **X** набуде значення, яке належить інтервалу (**a, b**), дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу, узятому в межах від **a** до **b**:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Знаючи щільність розподілу **f(x),** можна знайти функцію розподілу **F(x)** за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Дискретна випадкова величина X задана таблицею :

x	-3	-1	1	5	7
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Побудувати багатокутник розподілу.

2.Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	-2	-1	2	5	7

p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Побудувати функцію розподілу F(x) та її графік.

3.Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{(x+4)^2}{100}, & -4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Побудувати графік функції розподілу F(X) і обчислити ймовірність, що випадкова величина належить проміжку P(1<X<4).

2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закон розподілу є вичерпною характеристикою випадкової величини. Проте на практиці часто більш слушно описувати випадкові величини числами, що характеризують ті чи ті особливості розподілу випадкових величин (наприклад, середнє значення випадкової величини; розсіювання можливих значень випадкової величини навколо середнього значення тощо).

Нехай дискретна випадкова величина **X** набуває значень $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …, $\mathbf{x_n}$ з імовірностями $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ..., $\mathbf{p_n}$ Знайдемо «середнє зважене» всіх можливих значень величини **X** (з «вагами» що дорівнюють імовірностям цих значень), яке характеризує положення випадкової величини на числовій осі й називається *математичним сподіванням випадкової величини* **M(X)** або $\mathbf{m_x}$:

$$M(X)=\frac{x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i},$$

оскільки $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Означення. Математичним сподіванням *дискретної* випадкової величини **X** називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Неважко переконатися в тому, що за достатньої кількості спроб математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному значенню, яке спостерігається у випадкової величини.

Для *неперервної* випадкової величини **X** математичне сподівання виражається не сумою, а інтегралом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \ ,$$

де f(x) – щільність розподілу величини **X**.

Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини **X** належать відрізку [a, b], тоді

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx \ .$$

Розглянемо без доведення деякі властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині:

M(C)=C .

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:

M(C*X)=C*M(C).

3. Математичне сподівання добутку взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X\right] = \prod_{i=1}^{n} M(X) \ .$$

4. Математичне сподівання суми двох чи більше випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Ця властивість слушна як для незалежних, так і для залежних випадкових величин.

До характеристик положення випадкової величини, крім математичного сподівання, належать також **мода** й **медіана**.

Означення. Модою *дискретної* випадкової величини називається її значення, яке має найбільшу ймовірність.

Означення. Модою *неперервної* випадкової величини називається її значення, за якого щільність розподілу має максимум.

Якщо багатокутник розподілу (крива розподілу) має понад один максимум, розподіл називається *полімодальним*.

Розподіл, що має мінімум, але не має максимуму, називається *антимодальним*.

Означення. Медіаною випадкової величини називають таке її значення, для якого слушна рівність $P(X < Me) = P(X > Me)$, тобто однаково ймовірно, буде чи ні випадкова величина **X** менша або більша за **Me** .

Якщо розподіл є модальним і симетричним, то математичне сподівання, мода й медіана збігаються.

Числовою характеристикою розсіяння можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання є дисперсія.

Означення. Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = [X - M(X)]^2.$$

Якщо **X** – *дискретна* випадкова величина, тоді

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - M(X)]^2 P_i ,$$

де $\mathbf{x_i}$ – можливі значення випадкової величини **X**; $\mathbf{p_i}$ – імовірності, що їм відповідають.

Для *неперервних* випадкових величин дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 f(x) dx,$$

де f(x) – щільність розподілу.

Якщо можливі значення **X** належать відрізку **[a, b]**, тоді

$$D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(x)]^2 f(x) dx.$$

Дисперсією як дискретних, так і неперервних випадкових величин більш слушно обчислювати за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

де $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$, якщо **X** – *дискретна* випадкова величина, і

$M(X^2) = \int_{a}^{b} x^2 f(x) dx$, якщо **X** – *неперервна* випадкова величина.

Дисперсія має вимірність квадрата випадкової величини, що часто робить її незручною для практичного застосування. Тому величину розсіяння можливих значень випадкової величини навколо середнього можна охарактеризувати середньоквадратичним відхиленням:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

розмірність якого збігається з розмірністю випадкової величини.

Поняття початкових і центральних моментів випадкової величини

Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин є поняття моментів випадкової величини (початкових і центральних).

Означення. Початковим моментом **k**-го степеня випадкової величини **X** є математичне сподівання **k**-го степеня цієї випадкової величини:

$$V_k = M(X^k).$$

Якщо **X** – *дискретна* випадкова величина, тоді

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \ .$$

Якщо **X** – *неперервна* випадкова величина, тоді

$$V_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$$

Математичне сподівання **X** – це початковий момент першого порядку:

$$\mathbf{v_1=M(X)}.$$

Означення. Центрованою випадковою величиною, яка відповідає величині **X**, називається відхилення випадкової величини **X** від її математичного сподівання:

$$\overset{o}{X} = X - M(X).$$

Моменти центрованої випадкової величини називаються центральними моментами.

Означення. Центральним моментом **k**-го порядку випадкової величини **X** є математичне сподівання **k**-го степеня відповідної центрованої випадкової величини:

$$\mu_k = M(\overset{o}{X}{}^k) = M\left[X - M(X)\right]^k.$$

$$\mu_1 = M(\overset{o}{X}) = M\left[X - M(X)\right] = 0,$$

зокрема,

$$\mu_2 = M(\overset{o}{X}{}^2) = M\left[X - M(X)\right]^2 = D(X),$$

тобто дисперсія випадкової величини **X** є центральним моментом другого порядку.

Якщо **X** – *дискретна* величина, тоді

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^k p_i \ .$$

Якщо **X** – *неперервна* випадкова величина, тоді

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^k f(x)dx.$$

Застосовуючи властивості математичного сподівання, можна одержати співвідношення, що зв'язують початкові й центральні моменти:

$$\mu_2 = V_2 - V_1;$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_1V_2 + 2V_1^3;$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4.$$

Моменти вищих порядків застосовуються рідко.

Центральний момент третього порядку слугує для характеристики асиметрії розподілу.

Означення. *Асиметрією* розподілу називається відношення центрального моменту третього порядку до куба середньоквадратичного відхилення:

$$A_n = \mu_3 / \sigma^3$$

Центральний момент четвертого порядку слугує для характеристики гостровершинності або плосковершинності (*крутизни*) розподілу. Такою характеристикою є ексцес, що визначається рівністю:

$$E_k = \mu_4 / \sigma^4.$$

Розглянуті моменти називаються теоретичними моментами.

На практиці часто потрібно оперувати нормованими випадковими величинами.

Означення. Нормованою випадковою величиною (**T**) називають центровану випадкову величину, виражену в частинах середньоквадратичного відхилення

$$T = \frac{\overset{o}{X}}{\sigma(X)} = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}.$$

Математичне сподівання нормованої випадкової величини **M(T)** дорівнює нулю, а дисперсія **D(T)** дорівнює одиниці.

Задачі для самостійного розв'язання

1.Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	-2	-1	2	5	7
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Обчислити математичне сподівання.

2.За заданою функцією щільності ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{\sqrt{x+2}}{36}+\frac{x^2-4}{162}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7\end{cases}$$

обчислити математичне сподівання.

3.За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{\sqrt{x-2}}{2}, & -2<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

обчислити математичне сподівання.

4.За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ a\,(x+4)(x-5), & -4<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайти параметр а , щільність ймовірностей F(x), моду Мо.

5. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	-2	-1	2	5	7
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Обчислити дисперсію D(X) та середнє квадратичне відхилення σ (x).

3. ДЕЯКІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний розподіл

Біноміальним називають розподіл імовірностей дискретної випадкової величини **X** – кількості появи події **A** в **n** незалежних випробовуваннях, у кожному з яких імовірність появи події постійна й дорівнює **p**, що визначаються за формулою Бернуллі:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

де **k**=0, 1, 2, … , n; $\mathbf{P_n(k)}$ – імовірність того, що подія **A** в **n** незалежних випробовуваннях станеться рівно **k** разів; **q**=1-**p** – імовірність непояви події **A** в кожному випробовуванні;

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (кількість сполучень з **n** елементів по **k**).

Біноміальний закон розподілу можна подати як таблицю:

Таблиця 4

X	0	1	2	…	k	…	N
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Математичне сподівання випадкової величини **X**, що підлягає біноміальному законові розподілу, дорівнює добутку кількості випробовувань **n** на ймовірність **p** появи події в кожному випробовуванні:

M(X)=np.

Дисперсія й середньоквадратичне відхилення біноміального розподілу визначаються за формулами:

$$D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Показники асиметрії та ексцесу для біноміального розподілу мають вигляд:

$$A_S = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; \quad E_k = \frac{1-\sigma pq}{npq}.$$

Розподіл Пуассона

Пуассонівським називають розподіл імовірностей дискретної випадкової величини **X** – числа появи події в **n** незалежних випробовуваннях (**n** достатньо велике), у кожному з яких імовірність появи події постійна й дорівнює **p** (**p**≤0,1), що визначається за асимптотичною формулою Пуассона:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де λ=**np** – середня кількість появи події в n випробовуваннях;

k=0, 1, 2, … , **n** – кількість появи події в **n** незалежних випробуваннях. Цей розподіл залежить від одного параметра **λ**.

Закон Пуассона в табличній формі має вигляд:

Таблиця 5

X	0	1	2	…	k	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Особливістю розподілу Пуассона є рівність математичного сподівання й дисперсії:

$$\mathbf{M(X)=D(X)=np=\lambda.}$$

Показники асиметрії та ексцесу мають вигляд:

$$A_S = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad E_k = \frac{1}{\lambda}.$$

3.2. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Показниковий розподіл

Показниковим (експоненціальним) називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини **X**, описаної диференціальною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad якщо \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \quad якщо \quad x \geq 0, \end{cases}$$

де **λ** – постійна додатна величина.

Показниковий розподіл визначається одним параметром λ. Інтегральна функція показникового розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad якщо \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \quad якщо \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання показникового розподілу дорівнює зворотній величині параметра λ:

$$M(X) = 1/\lambda$$

Дисперсія показникового розподілу

$$D(X) = 1/\lambda^2 .$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює математичному сподіванню:

$$\sigma(X) = M(X) = 1/\lambda$$

Показники асиметрії та ексцесу показникового розподілу за будь-якого значення параметра **λ** мають постійні значення: **As**=2; **Ek**=9.

Показниковий розподіл широко застосовують у додатках, зокрема в теорії надійності.

Рівномірний розподіл

Рівномірним називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини **X**, якщо на інтервалі **(a, b)**, якому належать всі можливі значення **X**, щільність розподілу зберігає постійне значення

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

поза цим інтервалом f(x)=0.

Диференціальна та інтегральна функції рівномірного розподілу мають вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{якщо}\ a \le x \le b, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > b; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{якщо}\ a \le x \le b, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > b; \end{cases}$$

Математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини **X**

$$M(X) = (a-b)/2 .$$

Дисперсія випадкової величини **X**

$$D(X) = (b-a)^2/12.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = (b-a)\big/2\sqrt{3}\ .$$

Через симетричність рівномірного розподілу

As=0, **Me** =**M(X)** =**(a+b)**/2;

коефіцієнт ексцесу **E**=-1, 2; моди рівномірний розподіл не має.

Нормальний розподіл

Нормальним називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини **X**, якщо диференціальна функція має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\ .$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами: **a** – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення. Графік диференціальної функції нормального розподілу, що має назву нормальної кривої (кривої Гауса), розташований над віссю абсцис, симетрично до прямої **x=a**; якщо **x=a,** функція f(x) має максимум, який дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Точки графіка $\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ і $\left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ – точки перетину; якщо $x \to \pm\infty$ крива асимптотично наближається до осі абсцис (рис. 3).

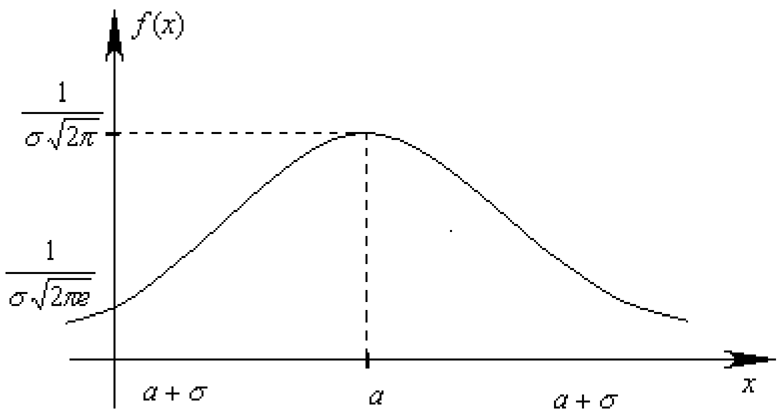


Рис. 3. Нормальна крива Гауса

Розташування нормальної кривої осі абсцис змінюється зі зміною параметра a; форма нормальної кривої змінюється, якщо змінюється параметр σ (зі зростанням σ максимальна ордината кривої зменшується, а сама крива стає більш пологою; зі зменшенням крива стає більш «гострою»).

Асиметрія, ексцес, мода, медіана нормального розподілу відповідно дорівнюють

$$A_S = 0;\ E_k = 0;\ M_0 = a;\ Me = a.$$

Нормованим називається нормальний розподіл з параметрами a=0, σ=1.

Диференціальна функція нормованого розподілу має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ця функція є табульованою.

На практиці часто потрібно обчислювати ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина **X** набуде значення, яке належить інтервалу (α,β), з застосуванням рівності

$$P(\alpha < X < \beta) = \phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

де $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа, значення якої знаходить за таблицею (див. додаток № 2), причому в таблиці наведені значення **Ф(x)** для 0≤x≤5, для x<0 застосовують ту саму таблицю (функція **Ф(x)** непарна, тобто **Ф(-x)**= ─ **Ф(x),** для x>5 можна взяти **Ф(x)**=0,5).

Імовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини **X** від її математичного сподівання **a** на величину, меншу від заданого числа δ, визначають, застосовуючи рівність:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\phi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Поклавши δ=σt, одержимо

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

Якщо **t**=3 маємо

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2*0.49865=0.9973$$

Тобто, можна вважати практично достовірною подію, що випадкова величина **X**, розподілена за нормальним законом, набуває значення на інтервалі (a-3σ, a+3σ). У цьому суть правила трьох сигм: *якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення*.

Це правило можна застосувати, коли необхідно визначити, чи має випадкова величина, що вивчається, нормальній розподіл. Якщо зазначена в правилі умова виконується, то випадкова величина розподілена нормально, а інакше розподіл випадкової величини нормальним не буде.

Якщо про розподіл випадкової величини невідомо нічого, крім діапазону її випадкових відхилень, то на підставі правила трьох сигм, можна орієнтовно оцінити середнє квадратичне відхилення: треба взяти максимальне практично можливе відхилення випадкової величини від її середнього значення й поділити це відхилення на 3. Особливість нормального закону розподілу полягає в тому, що він є граничним для інших законів розподілу.

Розподіл χ^2

Нехай $X_i (i=1,2,...,n)$ – нормальні незалежні випадкові величини, кожна з яких має нульове математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнює 1.

Розглянемо випадкову величину Y, яку визначаємо так:

$$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

Тоді **Y** підлягає розподілу χ^2 («хі квадрат») з **k=n** ступенями свободи.

Диференціальна функція цього розподілу має вигляд:

$$f=\begin{cases} 0, & ,\text{якщо} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{\kappa}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\left(\frac{k}{2}\right)-1}, & ,\text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

де **Γ(n)** – гама-функція:

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx.$$

Якщо n>2, для визначення значень функції застосовують співвідношення

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1);$$

де $\Gamma_{n-1}=(n-1)!$, якщо **n** ціле додатне число.

Розподіл χ^2 визначається одним параметром (кількістю ступенів свободи **k**).

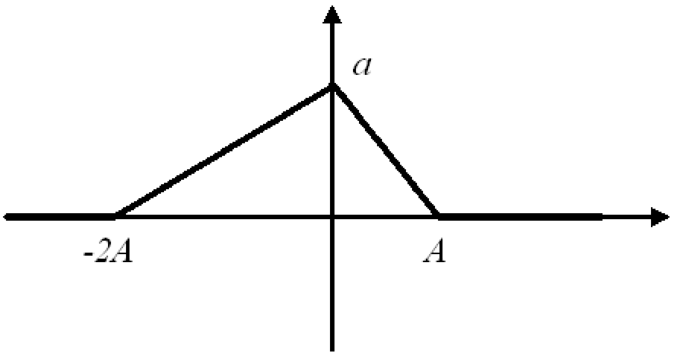
Математичне сподівання розподілу χ^2 з **k** ступенями свободи дорівнює **k**, дисперсія – 2**k**. Розподіл не є симетричним.

Зі збільшенням кількості ступенів свободи йде повільне наближення розподілу до нормального.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Ймовірність появи події А в будь-якому випробуванні однакова і дорівнює 0,25. Відомо, що математичне сподівання випадкової величини Х – кількості разів появи події А - дорівнює М(х) = 2. Визначити середнє квадратичне відхилення випадкової величини.
2. Дилер фірми постачає покупцям прилади, ймовірність дефекту в кожному з яких дорівнює 0,002. Знайти дисперсію кількості приладів з дефектом у партії із 1500 приладів.

3. Відомі математичне сподівання a=15 та середнє квадратичне відхилення σ = 14 випадкової величини X, яка розподілена нормально. Обчислити ймовірність того, що ця випадкова величина прийме значення, які належать інтервалу (0;30).
4. Щільність розподілу f(x) має вигляд:



a= 1/6. Знайти A, F(x), графік F(x), M(x), D(x), σ(x).

4. ПОНЯТТЯ ПРО ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Теорія ймовірностей узагальнює реальні властивості випадкових явищ і величин. Важливим у процесі узагальнення є вираження об’єктивних закономірностей у вигляді закону великих чисел.

Нерівність Чебишева

Для будь-якої випадкової величини **X**, що має кінцеву дисперсію, і для будь-якого ε>0

$$P\left\{\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right\} < \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

або

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} < 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишева дозволяє оцінювати ймовірність відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання, знаючи лише D(X). Ця нерівність є надто корисною в різних теоретичних дослідженнях.

Застосовуючи поняття випадкової величини, математичного сподівання і дисперсії, П. Л. Чебишев сформулював, а А. А. Марков доповнив закон великих чисел.

Означення. Кажуть, що послідовність випадкових чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які мають математичні сподівання $M(X_1), M(X_2), ..., M(X_n)$, підлягає закону великих чисел, якщо середньоарифметичне цих випадкових величин

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

якщо n→∞ з імовірністю, що необмежено наближається до 1, скільки завгодно мало (менше ніж на ε>0) відрізняється від середньоарифметичного їх математичних сподівань, тобто при n→∞:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} \to 1. \quad (*)$$

Загальні умови, які повинні задовольняти випадкові величини $x_1, x_2, ..., x_n$, достатні для більшості практичних випадків, знайшов П. Л. Чебишев, а після цього ще більше поширив А. А. Марков. Стисло вони формулювалися так.

Теорема Чебишева

*Я*кщо величини $x_1, x_2, ..., x_n$ є попарно незалежними та їх дисперсії $D(X_i)$ обмежені, тобто $D(X_i) \le C$, де C – деяке число, незалежне від **n**, тоді гранична рівність (*) виконується, тобто для $x_1, x_2, ..., x_n$ закон великих чисел є вірним.

Теорема Бернуллі

Нехай проводяться **n** випробовувань, у кожному з яких подія **А** може з'явитися з тією самою імовірністю **p**. Позначимо через x_i кількість появи події **А** в і-ому випробовуванні. Можливі значення x_i: $x_1 = 1$, якщо подія **А** сталася, і $x_i = 0$, якщо А не сталася в цьому випробуванні. Сума $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ є кількість появи події **А** в **n** випробовуваннях. Тоді

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{m}{n}; \quad M(X_i) = 1p + 0(1-p)p;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = np; \quad D(X_i) = pq \leq \frac{1}{4}.$$

Можна довести, що якщо **p**+**q**=1, то **pq**=1/4.

Умови обмеженості дисперсії виконані. Тому до випадкової величини Х можна застосувати закон великих чисел. Підставляючи в (*) замість $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ число **m/n** і замість $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$- число **np**, одержимо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

тобто з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати: якщо кількість випробовувань n→∞, відносна частота появи події в одному випробовуванні скільки завгодно мало відхиляється від її імовірності. Це і є доведення теореми Бернуллі як окремого випадку закону великих чисел, сформульованого П.Л.Чебишевим.

Закон великих чисел має важливе практичне значення. Саме на цьому законі базується твердження, що середньо арифметичне значення вважається найбільш точним, найближчим до дійсного значення величини, що вимірюється. Закон великих чисел широко застосовується в статистиці, на ньому базується вибірковий метод, що вивчається в курсі математичної статики.

Задачі для самостійного розв'язання

1.Завод випускає 90% виробів першого сорту і 10% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Знайти ймовірність того, що число виробів першого сорту опиниться в межах від 900 до 940.

2. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі рівна 0,7. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з імовірністю, не меншою 0,96; можна було стверджувати, що відхилення частоти попадання в ціль від імовірності тієї ж події буде не більше 0,01?

3. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X-M(X)| < 0{,}2$.

Додаток 1

Таблиця значень функції φ (X) = $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107

2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0024
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$

x	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621

0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0.89	0,3133	1,19	0,3830
1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,50	0,4938
1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,52	0,4941
1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,54	0,4945
1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,56	0,4948
1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,58	0,4951
1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,60	0,4953
1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,62	0,4956
1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,64	0,4959
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,66	0,4961
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,68	0,4963
1,30	0,4032	1,65	0,4505	2,00	0,4772	2,70	0,4965
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783	2,72	0,4967
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,74	0,4969
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803	2,76	0,4971
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,78	0,4973
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,80	0,4974
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,82	0,4976
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,84	0,4977
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846	2,86	0,4979
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854	2,88	0,4980
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,90	0,4981
1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,92	0,4982
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875	2,94	0,4984
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,96	0,4985
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887	2,98	0,4986
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,00	0,49865
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898	3,20	0,49931
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904	3,40	0,49966
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909	3,60	0,499841
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913	3,80	0,499928
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,40	0,4918	4,00	0,499968
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,42	0,4922	4,50	0,499997
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,44	0,4927	5,00	0,49999997

1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,46	0,4931	∞	0,5
1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,48	0,4934		

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. -М.: Наука, 1983. - 416 с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1986. - 431 с.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. - М.: Высш. шк., 1984. - 472 с.
4. Большев А.Н., Иванова Г.П. Сборник задач по математической статистике. -М.: 1980. -65 с.
5. Большев А.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
6. Брановицька С.В., Медведєв Р.Б., Фіалков Ю.Я. Обчислювальна математика та програмування: Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник.-К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», ТОВ «Фірма «Періодика», 2004.-220с:іл.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособие для высш.шк. – М.: В.школа., 2004.- 479с.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учеб.пособие для высш.шк. – М.: В.школа., 2000.- 400с.:ил.
9. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. -К.: В. школа. Головное изд-во, 1979.- 408с.
10. Гнеденко Б.В. Курс теорії ймовірностей. – К.: Рад.шк., 1949.- 360с.
11. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики.-М.: Финансы и статистика, 1982 -344 с.
12. Севастьянов Б.А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1980.- 223с.
13. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.- «Техніка», 1975, - 768 с.

14. Теорія ймовірностей:Збірник задач/ За ред. А.В. Скорохода. – Вища шк. Головне вид-во, 1976.- 384с.